Рабочая программа дисциплины (модуля) «Высшая математика», включая оценочные материалы

1. Требования к результатам обучения по дисциплине (модулю)

1.1. Перечень компетенций, формируемых дисциплиной (модулем) в процессе освоения образовательной программы

Группа компетенций	Категория компетенций	Коды и содержание компетенций
Универсальные	-	-
Общепрофессиональные	-	ОПК-1. Способен использовать математические, естественнонаучные и инженерные знания для решения задач своей профессиональной деятельности
	-	ОПК-3. Способен проводить научные исследования и анализ полученных результатов
	-	ОПК-4. Способен использовать методы математического моделирования отдельных стадий и всего технологического процесса, осуществлять теоретический анализ и экспериментальную проверку адекватности модели
	-	ОПК-5. Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности
Профессиональные	-	-

1.2. Компетенции и индикаторы их достижения, формируемых дисциплиной (модулем) в процессе освоения образовательной программы

Код компетенции	Код индикатора компетенции	Содержание индикатора компетенции
ОПК-1	ОПК-1.1	Применяет при решении задач профессиональной деятельности математический аппарат, методы математического анализа и моделирования
ОПК-3	ОПК-3.3	Обрабатывает и интерпретирует экспериментальные данные для анализа технологических процессов, применяя математические, статистические, физические, физико-химические, химические методы
ОПК-4	ОПК-4.1	Использует математические методы и методы статистики для обработки и анализа данных при решении задач профессиональной деятельности, применяет методы математического моделирования процессов и объектов на базе стандартных пакетов прикладных программ
ОПК-5	ОПК-5.1	Применяет средства современных информационных технологий для поиска, хранения, обработки, анализа и представления информации

1.3. Результаты обучения по дисциплине (модулю)

Цель изучения дисциплины (модуля) – формирование математической культуры студентов, овладение современным аппаратом математики для дальнейшего использования в других областях естественнонаучного знания и дисциплинах естественнонаучного содержания, подготовка к изучению и применению математических методов в профессиональной деятельности, к самостоятельному изучению тех разделов математики, которые могут потребоваться дополнительно в практической и исследовательской работе; формирование навыков использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности и научной работе.

В результате изучения дисциплины (модуля) обучающийся должен

знать:

- приемы исследования и решения математически формализованных задач;

- математические методы, используемые для сбора, обработки и анализа данных, необходимых для решения поставленных экономических задач;

уметь:

- выбирать ресурсы для поиска информации, необходимой для решения поставленной задачи;
- находить, критически анализировать, сопоставлять, систематизировать и обобщать обнаруженную информацию, необходимую для решения поставленной задачи;
- выявлять системные связи и отношения между изучаемыми явлениями, процессами и/или объектами на основе принятой парадигмы
- применять математические методы для решения практических задач;
- строить математические модели прикладных экономических задач и исследовать эти модели;

владеть:

- методами математического анализа, линейной алгебры, применяемыми в экономике;
- навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач;
- математическими методами решения типовых организационно-управленческих задач.

2. Объем, структура и содержание дисциплины (модуля)

2.1. Объем дисциплины (модуля)

Виды учебной работы	***Формы обучения***
	Очная
Общая трудоемкость: зачетные единицы/часы	10/360
Контактная работа:	216
Занятия лекционного типа	108
Занятия семинарского типа	108
Консультации	0
Промежуточная аттестация: зачет, зачет, экзамен	36
Самостоятельная работа (СР)	108

2.2. Темы (разделы) дисциплины (модуля) с указанием отведенного на них количества часов по формам образовательной деятельности

Очная форма обучения

№ п/п	**Наименование тем (разделов)**	**Виды учебной работы (в часах)**						
		Контактная работа						**СР**
		Занятия лекционного типа		**Занятия семинарского типа**				
		Л	**Иные**	**ПЗ**	**С**	ЛР	**Иные**	
1.	Элементы линейной алгебры	12	0	12	0	0	0	12
2.	Элементы аналитической геометрии	12	0	12	0	0	0	12
3.	Элементы математического анализа	14	0	14	0	0	0	14
4.	Дифференциальное исчисление	14	0	14	0	0	0	14
5.	Интегральное исчисление	14	0	14	0	0	0	14
6.	Функции нескольких переменных	14	0	14	0	0	0	14
7.	Дифференциальные и разностные уравнения	14	0	14	0	0	0	14

8.	Ряды	14	0	14	0	0	0	14

Примечания:

Л – лекции, ПЗ – практические занятия, С – семинары, ЛР – лабораторные работы, СР – самостоятельная работа.

2.3. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) и видам работ

Содержание лекционного курса

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Содержание лекционного курса
1.	Элементы линейной алгебры	Векторы и действия с ними. Линейное пространство. Матрицы и действия с ними. Определители: понятие, свойства, применение. Системы линейных уравнений: понятие, виды, методы решений. Линейные операторы и действия с ними. Квадратичные формы: понятия и виды.
2.	Элементы аналитической геометрии	Линии на плоскости. Кривые второго порядка: понятие, виды, преобразования. Прямые линии и плоскости в пространстве.
3.	Элементы математического анализа	Множество: понятие, виды, операции над ними. Функции: понятие, виды, применение. Переделы: определение, виды, применение. Непрерывность функции: определение, свойства,применение.
4.	Дифференциальное исчисление	Производная функции: определение, свойства, применения. Свойства дифференцируемых функции: основные теории и правила. Исследование функций с помощью первой производной. Исследование функций с помощью второй производной.
5.	Интегральное исчисление	Методы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций. Определенный интеграл: понятие, свойства, применение. Несобственные интегралы: понятие, виды, свойства
6.	Функции нескольких переменных	Функция многих переменных: понятие, свойства, применение. Частные приращения и частные производные: понятие и свойства. Полные приращения и полный дифференциал: понятие и свойство. Экстремум: понятие и свойства.
7.	Дифференциальные и разностные уравнения	Дифференциальные уравнения первого порядка: понятие, свойства, применения. Дифференциальные уравнения второго и высшего порядков: понятие, свойства, применение. Разностные уравнения: понятие, свойства, применение.
8.	Ряды	Числовые ряды: понятие, свойства, применение. Функциональные ряды: понятие, свойства, применение. Ряды Тэйлора и Маклорена: определение, свойства, применение.

Содержание занятий семинарского типа

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Тип	Содержание занятий семинарского типа
1.	Элементы линейной алгебры	ПЗ	Проблемы для обсуждения: Векторы и действия с ними. Линейное пространство. Матрицы и действия с ними. Определители: понятие, свойства, применение. Системы линейных уравнений: понятие, виды, методы решений. Линейные операторы и действия с ними. Квадратичные формы: понятия и виды. Решение задач: Действия с векторами. Действия с матрицами. Применение определителей. Решение систем линейных уравнений. Действия с линейными операторами. Применение элементов линейной алгебры в экономике.
2.	Элементы аналитической геометрии	ПЗ	Проблемы для обсуждения: Линии на плоскости.

			Кривые второго порядка: понятие, виды, преобразования. Прямые линии и плоскости в пространстве. Решение задач: Метод координат на плоскости. Прямая в декартовых координатах. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Кривые второго порядка. Преобразование уравнений второго порядка к каноническому виду. Плоскость. Прямая линия в пространстве.
3.	Элементы математического анализа	ПЗ	Проблемы для обсуждения: Множество: понятие, виды, операции над ними. Функции: понятие, виды, применение. Переделы: определение, виды, применение. Непрерывность функции: определение, свойства, применение. Решение задач: Операции над множествами. Основные элементарные функции и их графики. Вычисление пределов переменных величин и функций одной переменной. Непрерывные функции.
4.	Дифференциальное исчисление	ПЗ	Проблемы для обсуждения: Производная функции: определение, свойства, применения. Свойства дифференцируемых функции: основные теории и правила. Исследование функций с помощью первой производной. Исследование функций с помощью второй производной. Дифференциал функции. Решение задач: Производные основных элементарных функций. Производные сложной и обратной функций. Производные высших порядков. Приложение производной к исследованию функций.
5.	Интегральное исчисление	ПЗ	Проблемы для обсуждения: Методы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций. Определенный интеграл: понятие, свойства, применение. Несобственные интегралы: понятие, виды, свойства Решение задач: Интегралы от основных функций. Использование методов интегрирования для случая неопределенных интегралов. Вычисление определенных интегралов. Вычисление несобственных интегралов.
6.	Функции нескольких переменных	ПЗ	Проблемы для обсуждения: Функция многих переменных: понятие, свойства, применение. Частные приращения и частные производные: понятие и свойства. Полные приращения и полный дифференциал: понятие и свойство. Экстремум: понятие и свойства. Решение задач: Функции нескольких переменных. Вычисление частных производных функции нескольких переменных. Нахождение полного дифференциала для функции двух

			и трех переменных. Локальный экстремум функции нескольких переменных.
7.	Дифференциальные и разностные уравнения	ПЗ	Проблемы для обсуждения: Дифференциальные уравнения первого порядка: понятие, свойства, применения. Дифференциальные уравнения второго и высшего порядков: понятие, свойства, применение. Разностные уравнения: понятие, свойства, применение. Решение задач: Решение дифференциальных уравнений первого порядка. Решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение типовых разностных уравнений.
8.	Ряды	ПЗ	Проблемы для обсуждения: Числовые ряды: понятие, свойства, применение. Функциональные ряды: понятие, свойства, применение. Ряды Тэйлора и Маклорена: определение, свойства, применение. Решение задач: Действия с рядами. Разложение в ряд элементарных функций Исследование рядов на сходимость. Разложение функций в ряд Маклорена.

Содержание самостоятельной работы

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Содержание самостоятельной работы
1.	Элементы линейной алгебры	Специфические свойства операции умножения матриц. Матричная модель балансового анализа. Линейная модель обмена (матричная модель международной торговли).
2.	Элементы аналитической геометрии	Приложения метода координат на плоскости. Частные случаи общего уравнения плоскости. Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.
3.	Элементы математического анализа	Числовые множества. Комплексные числа. Числовые последовательности.
4.	Дифференциальное исчисление	Производные высших порядков от явно заданных функций. Производные высших порядков от неявно заданных функций. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически. Приложение дифференциального исчисления к геометрии.
5.	Интегральное исчисление	Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь плоской фигуры. Объем тела вращения. Длина дуги кривой.
6.	Функции нескольких переменных	Функции трех и более переменных. Производная по дуге и по направлению. Градиент и его связь с производной по направлению. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
7.	Дифференциальные и разностные уравнения	Дифференциальные уравнения высших порядков. Особые решения. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной.
8.	Ряды	Применение рядов в приближенных вычислениях. Приближенное вычисление значений функций. Приближенное вычисление интегралов. Интегрирование дифференциальных уравнений.

3. Оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

По дисциплине (модулю) предусмотрены следующие виды контроля качества освоения:

- текущий контроль успеваемости;
- промежуточная аттестация обучающихся по дисциплине (модулю).

3.1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые темы (разделы)	Наименование оценочного средства
1.	Элементы линейной алгебры	Устный опрос, кейсы, контрольная работа, тест.
2.	Элементы аналитической геометрии	Устный опрос, кейсы, контрольная работа, тест.
3.	Элементы математического анализа	Устный опрос, кейсы, контрольная работа, тест.
4.	Дифференциальное исчисление	Устный опрос, кейсы, контрольная работа, тест.
5.	Интегральное исчисление	Устный опрос, кейсы, контрольная работа, тест.
6.	Функции нескольких переменных	Устный опрос, кейсы, контрольная работа, тест.
7.	Дифференциальные и разностные уравнения	Устный опрос, кейсы, контрольная работа, тест.
8.	Ряды	Устный опрос, кейсы, контрольная работа, тест.

3.1.1 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности в процессе текущего контроля успеваемости

Устный опрос

№ п/п	Контролируемые темы (разделы)	Вопросы к опросу
1	Элементы линейной алгебры	1. Матрицы и их виды. Операции над матрицами. 2. Вычисление определителей квадратных матриц 1, 2 и 3-го порядков. 3. Минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы. 4. Теорема Лапласа. Свойства определителей, вытекающие из теоремы Лапласа. 5. Обратная матрица. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы. 6. Теорема о ранге матрицы. 7. Метод обратной матрицы решения СЛАУ. 8. Метод Крамера решения СЛАУ. 9. Метод Гаусса решения СЛАУ. 10. Теорема Кронекера Капелли. 11. Системы однородных уравнений. Фундаментальная система решений. 12. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. 13. Квадратичные формы. 14. Знакоопределенность квадратичной формы.
2	Элементы аналитической геометрии	1. Метод координат на плоскости. 2. Прямая в декартовых координатах. 3. Методы задания уравнение прямой на плоскости. 4. Условие параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. 5. Угол между двумя прямыми. 6. Условие параллельности 7. и перпендикулярности двух плоскостей 8. Угол между двумя плоскостями. 9. Окружность и эллипс. 10. Гипербола и парабола. 11. Уравнение плоскости и прямой в пространстве. 12. Пространственные фигуры.
3	Элементы математического анализа	1. Понятие множества. 2. Операции над множествами. 3. Понятие функции. 4. Способы задания функций. 5. Основные свойства функций. 6. Основные элементарные функции и их графики. 7. Предел числовой последовательности и его геометрический смысл.

		8. Предел функции в бесконечности и в точке. 9. Бесконечно малые и бесконечно большие величины, их свойства. 10. Основные теоремы о пределах. 11. Признаки существования предела. 12. Замечательные пределы. 13. Определение непрерывности функции в точке. 14. Точки разрыва функции.
4	Дифференциальное исчисление	1. Физический, экономический и геометрический смысл производной. 2. Непрерывность и дифференцируемость функции. 3. Основные правила и формулы дифференцирования. 4. Производные сложной и обратной функций. 5. Производные высших порядков 6. Раскрытие неопределенностей. 7. Формула Маклорена. 8. Исследование функций. 9. Понятие дифференциала функции. Геометрический смысл дифференциала. 10. Приближение дифференциала в приближенных вычислениях.
5	Интегральное исчисление	1. Первообразная функции и неопределенный интеграл. 2. Свойства неопределенного интеграла. 3. Интегралы от основных функций. 4. Формулы интегрирования. 5. Метод замены переменной. 6. Метод интегрирования по частям. 7. Понятие «неберущихся» интегралов. 8. Понятие определенного интеграла, его геометрический и экономический смысл. 9. Достаточное условие существования определенного интеграла. 10. Свойства определенного интеграла. 11. Формула Ньютона-Лейбница. 12. Особенности использования методов интегрирования для случая определенных интегралов. 13. Несобственные интегралы. 14. Геометрические приложения определенного интеграла.
6	Функции нескольких переменных	1. Частные производные. 2. Производная по направлению. 3. Градиент. 4. Дифференциал функции нескольких переменных – ФНП. 5. Максимум и минимум ФНП. 6. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных. 7. Условный экстремум. 8. Понятие двойного интеграла.
7	Дифференциальные и разностные уравнения	1. Геометрическая интерпретация уравнения $y' = f(x,y)$ и его решения. 2. Интегральные кривые. 3. Задача Коши. 4. Уравнения с разделяющимися переменными.

		5. Виды дифференциальных уравнений первого порядка. 6. Методы решения дифференциальных уравнений первого порядка. 7. Дифференциальные уравнения второго порядка. 8. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. 9. Разностные уравнения. 10. Методы решения линейных разностных уравнений.
8	Ряды.	1. Гармонический ряд. 2. Сходимость числового ряда. Признаки сходимости. 3. Ряды с положительными членами. Признак сравнения рядов. Предельный признак сравнения. 4. Признаки сходимости рядов: признак Даламбера; интегральный признак Коши. 5. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. 6. Функциональный ряд. Типы функциональных рядов. 7. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Теорема Абеля. 8. Ряд Тейлора. 9. Ряд Маклорена, как частный случай ряда Тейлора. 10. Необходимый и достаточный признак сходимости ряда Маклорена.

Кейсы (ситуации и задачи с заданными условиями)

1. При каком λ элементы линейного пространства $\mathbf{R}^3$
x1 = (3, -2, 5), x2 = (-4, 2, 1), x3 = (2, -4, λ) будут линейно зависимыми?

2 Линейное пространство образовано матрицами, имеющими 2 строки и 3 столбца. Сложение и умножение на число задаются обычным для матриц способом. Чему равна размерность пространства?

3.Найти размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. При каком α отображение $\boldsymbol{A} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, заданное формулой
$\boldsymbol{A}(x_1, x_2) = (2x_1 + \alpha, 3x_1 + 2x_2)$, будет линейным оператором?

5. Линейный оператор **φ** задан в базисе $\mathbf{e}_1$ **,** $\mathbf{e}_2$ матицей $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Найти образ вектора $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, в ответе указать сумму его координат.

6. Линейный оператор $\boldsymbol{\varphi} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$,
Вектор (β, 1) – собственный вектор для **φ,** относящийся к собственному значению λ=2. Найти β.

7. Найти положительный индекс инерции квадратично формы
$f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$

8. Найти матрицу квадратичной формы, получаемой из
$f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$
линейной заменой переменных $x_1 = 3y_1+y_2$, $x_2 =2y_1 - y_2$. В ответе указать элемент, стоящий

в правом верхнем углу матрицы.

Линейные пространства

1. Доказать, что каждая из двух систем векторов (e) и (e’) является базисом, найти связь координат одного и того же вектора в этих базисах.

$$\boldsymbol{e}:\ \vec{e}_1=(1,\ 2,\ 1),\quad \vec{e}_2=(2,\ 3,\ 3),\quad \vec{e}_3=(3,\ 7,\ 1);$$

$$\boldsymbol{e}':\ \vec{e}_1=(3,\ 1,\ 4),\quad \vec{e}_2=(5,\ 2,\ 1),\quad \vec{e}_3=(1,\ 1,\ -6).$$

Решение

Чтобы проверить, что каждая из систем векторов образует базис, надо найти их ранги. Для пространства V^3 ранг каждой из систем векторов должны равняться 3.

$$\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$rang(\boldsymbol{e})=3,\quad \Delta(\boldsymbol{e})=1$$

$$\boldsymbol{e}'=\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-2\\0&-7&-10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

rang (e’) = 3, Δ(e’) = 4

Пусть вектор $\vec{x}$ в базисе e имеет координаты (x_1,x_2,x_3), а в базисе e’ — координаты (x'_1,x'_2,x'_3).

Тогда связь задается формулой

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix},\ \text{т.е.}\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу T перехода от базиса e к e’.

Согласно равенству e’=eT имеем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}T,$$

для решения которого построим матрицу

$$\boldsymbol{e}^{-1}=\begin{pmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Дальше имеем:

$$T=\boldsymbol{e}^{-1}\boldsymbol{e}'=\begin{pmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 41x_3',$$
$$x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3',$$
$$x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3'.$$

2. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств
$L_1 = <$ **a**$_1$, **a**$_2$, **a**$_3$ $>$ и $L_2 = <$ **b**$_1$, **b**$_2$, **b**$_3$ $>$, если :

$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1,-2)^T$ $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$
$\mathbf{a}_2 = (2,3,1,0)^T$ $\mathbf{b}_2 = (1, 0,1,-1)^T$
$\mathbf{a}_3 = (1, 2,2,-3)^T$ $\mathbf{b}_3 = (1, 3,0, - 4)^T$

Евклидовы пространства

3. В евклидовом пространстве R^5 найти угол между векторами
$\boldsymbol{a} = (3,-5,1,5,-2)$ и $\boldsymbol{b} = (4,0,-4,4,1)$.

4. В евклидовом пространстве найти косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если $||\boldsymbol{a}|| = 3$, $||\boldsymbol{b}|| = 1$ и $|| \boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}||^2 + || 2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}||^2 = 60$

5. Доказать, что любую ортогональную систему ненулевых векторов евклидова пространства можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.

Линейные операторы

6. Найти собственные значения и собственные векторы
линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение

Запишем характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3 = 0$$

Корень уравнения $\lambda = 2$ имеет кратность 3 и является собственным значением линейного оператора.

Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению
$\lambda = 2$ найдем из однородной СЛАУ $(A - \lambda E)\cdot X = O$ при $\lambda = 2$:

$$-2x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0$$
$$-4x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0$$
$$-2x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0$$

Вычеркнув из системы второе и третье уравнения, придем к уравнению
$-2x1 + x2 = 0$.

Ранг матрицы системы r=1, выбираем базисной неизвестной x_2 , x_1 и x_3 будут свободными неизвестными. Решение СЛАУ может быть записано в виде линейной комбинации линейно независимых векторов $X = \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,0,1)$

Векторы ***e1***= (1,2,0) и ***e2*** = (0,0,1) порождают собственное подпространство оператора. Любой ненулевой вектор этого подпространства является собственным вектором оператора ***A***, отвечающим собственному значению $\lambda = 2$

7. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств

$L_1 = <\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3>$ и $L_2 = <\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3>$, если :

$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1)^T$ $\mathbf{b}_1 = (2, 3, -1)^T$

$\mathbf{a}_2 = (1, 1, -1)^T$ $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 2)^T$

$\mathbf{a}_3 = (1, 3, 3)^T$ $\mathbf{b}_3 = (1, 1, -3)^T$

8. Разложить вектор **X** на сумму двух векторов, один из которых лежит в подпространстве, натянутом на векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, а другой ортогонален к этому подпространству.

$\mathbf{X} = (-3, 5, 9, 3)^T$

$\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$ $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 1, 1)^T$ $\mathbf{a}_3 = (2, -7, -1, -1)^T$

9. Найти собственные значения и собственные вектора матриц:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10. Для заданной матрицы линейного оператора найти базис из собственных векторов и соответствующую ему диагональную форму матрицы.

A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

11. Линейный оператор φ переводит векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ соответственно в векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$. Найти матрицу оператора φ в том же базисе, в котором заданы координатами все векторы:

$\mathbf{a}_1 = (1, 2, -3)^T$ $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 2)^T$ $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 4)^T$

$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)^T$ $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 1)^T$ $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 1)^T$

Квадратичные формы

12. Преобразовать к сумме квадратов квадратичную форму и выписать преобразование координат

$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

13. Преобразовать к каноническому виду квадратичную форму

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

1. Найти модули и аргументы следующих чисел:

а) i; б) -3; в) $1 + i^{123}$; г) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\frac{1-i}{1+i}$; е) $(-4+3i)^3$;

ж) $\frac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^6}$.

2. Доказать $|\bar{z}| = |z|$, $z \cdot \bar{z} = |\bar{z}|^2$, $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

3. Представить в тригонометрической форме следующие числа : а) $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$; б) $z_2 = 1 + i$; в) $z_3 = 1 - \sqrt{3}\,i$; г) $z_4 = i$; д) $z_5 = 5$.

Вычислить:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{n+1}{n^2+1}}{\sin\frac{2n-1}{n^2+2}}$;

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right)$;

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\ln x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos 3x}{1+\sin x\cos 2x}\right)^{1/\sin^3 x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\ln(x+2)+\sin(4-x^2)\cos\dfrac{x+2}{x-2}}$.

Пример 3. При каких значениях A и B функция

$$f(x)=\begin{cases}-2\sin x, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ A\sin x+B, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, & x\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$ непрерывна?

Найти производные следующих функций

1. а) $y=5x^2-\dfrac{1}{x}-3\sqrt{x}$; б) $y=\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt[5]{x}}{x^2}$;

в) $y=\dfrac{\left(\sqrt[5]{x}-\sqrt{x}\right)^3}{x}$.

13. $y=(\arcsin x)$ [illegible].

Найти производные функций, заданных параметрически:

14. $x=e^t$; $y=\operatorname{tg} t$;

15. $x=\sqrt[5]{1-t^2}$, $y=\cos t$.

Найти производные функций, заданных неявно:

16. $x+y-e^{xy}=0$.

17. $\sin(x^2-y)-y^2=0$.

18. Доказать, что уравнение $y=x^5+3x$ определяет однозначную функцию $x=x(y)$ и найти ее производную.

Найти дифференциалы функций:

19. $y=\sqrt[4]{x^3}\cdot\ln(1-5x)$.

20. $y=\dfrac{\sin 3x+1}{\cos 5x-1}$.

Найти производные и дифференциалы второго порядка

21. $y=\arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

22. $y=2^{-\operatorname{ctg} x}$.

8. Используя правила Лопиталя, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg} x-1}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 2x)}$;

Пример 7. Разложить следующие функции по формулам Тейлора и Маклорена в окрестности заданных точек: а) $y=x^3+3x^2-2x+4$; $x_0=-1$; б) $y=\operatorname{tg} x$; $x_0=0$ (формула 3-го порядка); в) $y=e^{\sin x}$; $x_0=0$ (формула 3-го порядка).

12. Найти промежутки монотонности следующих функций:

а) $y=x+\cos x$; б) $y=x^2e^x$; в) $y=x-\ln(1+x)$.

13. Найти экстремумы функций

а) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$; б) $y=e^x\sin x$;

14. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

а) $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$; б) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$; в) $y=e^{2x-x^2}$.

15. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y=\dfrac{4x^3+x-1}{x^2-x+1}$; б) $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

16. Найти наибольшие и наименьшие значения функций на промежутках:

а) $y=\dfrac{x^2-x+1}{-x^2+x+1}$; $x\in[0;1]$;

б) $y=2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x$; $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Пример 1. Найти области определения функций и изобразить их графически:

а) $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$; б) $z = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

Найти частные производные и частные дифференциалы:

9. $w = (\sin x)^{y^2}$. **10.** $z = \sin\dfrac{x^2}{y}$.

Найти производные сложных функций:

14. $z = f(x+y\,;\,xy)$.

15. $z = \sin x \cdot \ln y$, $x = t^3$; $y = e^t$.

Найти производную функции по заданному направлению вектора $\overrightarrow{AB}$ в заданной точке A:

17. $w = e^{x+2y+3z}$; $A\,(1;\,1;\,1)$; $B\,(2;\,-3;\,4)$.

Найти производную функции, заданной неявно:

23. $2^{x^2+y} - y = 0$. **24.** $\sin(x^2+y^2) - x - y = 0$.

Найти стационарные точки, точки экстремума и экстремумы функций:

3. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

4. $z = xy \cdot \ln(x^2+y^2)$.

5. $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

6. $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$ в круге $x^2+y^2 \le 4$.

7. $z = x^2 - xy + y^2$, если $|x| + |y| \le 1$.

Найти точки условного экстремума и значения условных экстремумов функций:

8. $z = x + y$, если $x^2 + y^2 = 1$.

9. $z = x^2 + y^2$, если $x + y = 1$.

Взять интегралы

1. $\int \dfrac{(x-1)^3}{x^4}\,dx$ 2. $\int \dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}\,dx$

3. $\int \dfrac{9+2x^2}{x^2(9+x^2)}\,dx$ 4. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$

5. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ 6. $\int \dfrac{dx}{4-5x}$

7. $\int \sqrt[3]{(1+3x)^2}\,dx$ 8. $\int \dfrac{dx}{x \cdot \ln x}$

9. $\int \dfrac{e^{\operatorname{tg} x}dx}{\cos^2 x}$ 10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$

11. $\int \dfrac{dx}{5+2x^2}$ 12. $\int \dfrac{dx}{3x^2-4}$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$ 14. $\int \dfrac{\cos x \cdot \sin x \cdot dx}{1+\sin^4 x}$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+3}$ 16. $\int \dfrac{2x-3}{x^2+4x+1}\,dx$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$ 18. $\int \dfrac{dx}{e^x(1+e^{-x})}$

19. $\int e^{2x} \cdot \cos x\,dx$ 20. $\int \ln x\,dx$

21. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$ 22. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

1. Вычислить

5. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$ 6. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\sin 3x\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$ 8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+6x+10}$

2.

Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

1. $y = \operatorname{tg} x$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$; $y = 0$.

2. $y = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1; \\ (x-2)^2, & 1 \le x \le 2, \end{cases}$ и осью Ox.

1.Рассмотреть сходимость интегралов

1. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$ 2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x-2}.$

3. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ 4. $\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx.$

Вычислить двойные интегралы по прямоугольной области P:

3. $\iint\limits_P \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$; $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$.

4. $\iint\limits_P x^2 y e^{xy}\,dx\,dy$; $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 2$.

Изменить порядок интегрирования

5. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x;y)\,dy.$ 6. $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x;y)\,dy.$

Вычислить интегралы

8. $\iint\limits_P (x+y)\,dx\,dy$, P – область, ограниченная кривыми $y^2 = 2x$; $x + y = 4$; $x + y = 12$.

Кратные интегралы: двойные интергалы, тройные интергалы, свойства кратных интегралов.

Сведение двойного интеграла к повторному однократному.

Замена переменных в кратных интегралах: переход от декартовой к произвольной системе координат, якобианы перехода к цилиндрической и к сферической системам координат.

Вычислить криволинейные интегралы первого рода:

1. $\int\limits_\Gamma (x+y)\,ds$, Γ – контур треугольника с вершинами (0; 0); (1; 0) и (0;1);

2. $\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)\,ds$, Γ – кривая $x = a(\cos t + t\sin t)$,

Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

5. $\int\limits_\Gamma (2xy-1)\,dx + (x^2y+2)dy$, Γ – дуга эллипса $x = \cos t$; $y = 3\sin t$, лежащая в 1-й четверти.

6. $\int (2xy-1)\,dx + (x^2y+2)dy$, Γ – дуга параболы

13. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода $\iint\limits_D \frac{dD}{(1+x+y)^2}$, где D – поверхность тетраэдра $x + y + z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

14. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_D x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, где D – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Исследовать сходимость рядов, применяя признаки сравнения (или необходимый признак):

8. $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$.

9. $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \ldots + \frac{n+1}{2n+1} + \ldots$.

С помощью признака Даламбера исследовать сходимость рядов:

12. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \ldots + \frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} + \ldots$.

13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

14. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{2^n(2n+1)}$.

С помощью признака Коши исследовать сходимости рядов:

17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

Исследовать сходимость следующих знакопеременных рядов. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Пример 1. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость его на концах интервала:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^{n-1} \cdot n} = 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \ldots.$$

1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π ($l = \pi$), которая определена следующим образом:

$f(x) = -x$ при $-\pi \le x < 0$,

$f(x) = x$ при $0 < x \le \pi$, т. е. $f(x) = |x|$.

Контрольный работа

Контрольная работа №1

Вычислить

1. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}{x^2 - x - 2}$.

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(5-n)^2 + (5+n)^2}{(5-n)^2 - (5+n)^2}$.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 3x}$.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}$.

Контрольная работа №2

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n$.

1. Вычислить производную функции

а) $y = (1 + x^2)\mathrm{arctg}\, x$ б) $y = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin x}$

2. Найти производную y_x

$y = t^3 + t$, $x = t^2 - 2t$

3. Найти дифференциал функции

$$y = \sin 5x + \cos\frac{\pi}{3}$$

4. Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \frac{x^3}{3 - x^2}$$

Контрольная работа №3

Условия задач. *Найти производные z'_x и z'_y функции $z = z(u, v)$, где $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.*

3. $z = u^v$, $u = \sin x$, $v = \cos y$.

Условия задач. *Найти производные функций $y = y(x)$, заданных неявно уравнениями.*

4. $x + y = e^{x-y}$.

Условия задач. Найти производную функции $u(x, y, z)$ в точке A по направлению к точке B.

5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$, $A(1, 1, 0)$, $B(3, 3, -1)$.

Условия задач. *Найти стационарные точки заданных функций и исследовать их характер.*

3. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$.

Контрольная работа №4

Вычислить интегралы

1. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx$
2. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$
3. $\int (3x + 4)e^{3x} dx$
4. $\int \frac{\cos x}{2+\cos x} dx$
5. $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx$

Контрольная работа№5

1. Вычислить определенный интеграл:

а) $\int\limits_0^3 \left(x^2 - 3x\right) \sin 2x dx$ б) $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{x \cdot dx}{2 + \sqrt{2x + 1}}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2},\ 1 \le x \le 2$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. Ось вращения Ox .

а) $y = -x^2 + 5x - 6,\ y = 0$

б) $y = 2x - x^2,\ y = -x + 2,\ x = 0$

5. Вычислить несобственный интеграл или установит его расходимость:

а) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(x+3)^3}$ б) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

Контрольная работа №6

1. Найти сумму ряда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2^n}{10^n}$

2. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n(n+1)}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

3. Найти область сходимости ряда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (2+x)^n$

<u>Пример 1</u> Найти силу тяги состава с рудой по истечении времени t имеющего начальную скорость v0, двигающегося с ускорением прямопропорциональным силе тяги F=b-kv и обратно пропорциональным массе состава с рудой. Если в начальный момент времени при t =0 сила тяги определяется выражением F(t)= F0=b-kv0.

▲ скорость движения состава с рудой является функцией времени, т.е. *v= v(t)*, а его ускорение определяется 2-м законом Ньютона

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$, где *F=b-kv*.

Поэтому дифференциальное уравнение исходной задачи будет иметь вид:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b-kv}{m}. \qquad (*)$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dv}{b-kv} = \frac{dt}{m},$$

Интегрируя которое, найдем общее решение уравнения (*)

$$-\frac{1}{k}\ln|b-kv| = \frac{1}{m}t + C \quad \text{или} \quad t = -\frac{m}{k}\ln|b-kv| + C \qquad (**)$$

В решении (**) удовлетворим начальному условию – $v(0)=v_0$.

$$0 = -\frac{m}{k}\ln|b-kv_0| + C \Rightarrow C = \frac{m}{k}\ln|b-kv_0|.$$

Подставив найденное значение постоянной *C* в общее решение (**), получим решение задачи Коши:

$$t = -\frac{m}{k}\ln|b-kv| + \frac{m}{k}\ln|b-kv_0|$$

или

$$t=\frac{m}{k}\ln\left|\frac{b-kv_0}{b-kv}\right|=\left\{F_0=b-kv_0,\ \ F=b-kv\right\}=\frac{m}{k}\ln\left|\frac{F_0}{F}\right|.$$

Таким образом, искомую силу тяги состава с рудой в любой момент времени, найдем из последнего равенства, избавившись в нем от логарифма

$$t\frac{k}{m}=\ln\left|\frac{F_0}{F}\right|\Rightarrow\frac{F_0}{F}=e^{\frac{k}{m}t}\Rightarrow F=F_0\,e^{-\frac{k}{m}t}.$$ ▲

<u>*Пример 2.*</u> Рассмотрим вентиляцию забоя объемом V(м^3), в котором в процессе проведения работ накапливаются вредные газообразные выделения в количестве Z в час. Пусть обмен воздуха в течении 1 часа составляет M (м^3/ч), причем приточный воздух содержит вредные вещества в концентрации μ на 1 м^3. Требуется найти концентрацию Z (на 1 м^3) вредных выделений в забое через время t после начала работы, если начальное значение этой концентрации (остаток загрязнений от предыдущей смены) составляет Z_0.

▲ За малый промежуток времени dt концентрация вредных выделений Z увеличивается на dZ. Следовательно общее количество выделений составит VdZ и оно будет состоять из выделений, принесенных приточным воздухом - μMdt, и выделений образовавшихся в процессе работы - Zdt за вычетом количества вредных выделений, которое содержалось в извлеченном из забоя за время dt воздухе. Предположим, что за малый промежуток времени dt изменение концентрации вредных выделений равно – $ZMdt$. Следовательно, уравнение вентиляции забоя имеет вид:

$$VdZ=\mu Mdt+Zdt-ZMdt \quad \text{или} \quad \frac{dZ}{dt}-\frac{1-M}{V}Z=\frac{\mu M}{V}$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным уравнением, которое будем решать используя сразу формулу общего решения (1.51):

$$Z=e^{\frac{1-M}{V}\int dt}\left[C_1+\frac{\mu M}{V}\int e^{-\frac{1-M}{V}\int dt}dt\right]=e^{\frac{1-M}{V}t}\left[C_1-\frac{\mu M}{V}\cdot\frac{V}{1-M}e^{-\frac{1-M}{V}t}\right] \quad \text{или}$$

$$Z=C_1e^{\frac{1-M}{V}t}-\frac{\mu M}{1-M}.$$

Удовлетворяя начальному условию $Z(0)=Z_0$, определим значение произвольной постоянной $Z_0=C_1-\frac{\mu M}{1-M},\ \Rightarrow C_1=Z_0+\frac{\mu M}{1-M}$. Таким образом, окончательное решение исходной задачи имеет вид:

$$Z=Z_0e^{\frac{1-M}{V}t}+\frac{\mu M}{1-M}\left(e^{\frac{1-M}{V}t}-1\right).$$ ▲

<u>*Пример 3*</u>. Найти силу тяги состава с рудой по истечении времени t имеющего начальную скорость v_0, двигающегося с ускорением прямопропорциональным силе тяги $F=b-kv$ и обратно пропорциональным массе состава с рудой. Если в начальный момент времени при $t=0$ сила тяги определяется выражением $F(t)=F_0=b-kv_0$.

▲ скорость движения состава с рудой является функцией времени, т.е. $v=v(t)$, а его ускорение определяется 2-м законом Ньютона

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}, \text{ где } F=b-kv.$$

Поэтому дифференциальное уравнение исходной задачи будет иметь вид:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{b-kv}{m}. \qquad (\square)$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dv}{b-kv}=\frac{dt}{m},$$

Интегрируя которое, найдем общее решение уравнения (□)

$$-\frac{1}{k}\ln|b-kv|=\frac{1}{m}t+C \quad \text{или} \quad t=-\frac{m}{k}\ln|b-kv|+C \qquad (□□)$$

В решении (□□) удовлетворим начальному условию – $v(0)=v_0$.

$$0=-\frac{m}{k}\ln|b-kv_0|+C \Rightarrow C=\frac{m}{k}\ln|b-kv_0|.$$

Подставив найденное значение постоянной C в общее решение (□□), получим решение задачи Коши:

$$t=-\frac{m}{k}\ln|b-kv|+\frac{m}{k}\ln|b-kv_0|$$

или

$$t=\frac{m}{k}\ln\frac{|b-kv_0|}{|b-kv|}.$$

Таким образом, искомую силу тяги состава с рудой в любой момент времени, найдем из последнего равенства, избавившись в нем от логарифма

$$v=\frac{b}{k}-\left(\frac{b}{k}-v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t}.$$ ▲

Пример 4. Трубопровод тепловой магистрали (диаметр 20 см) защищенный изоляцией толщиной 10 см отапливает рабочее помещение при этом температура трубы 160ºС, а внешнего ее покрова 30ºС. Определить распределение температуры внутри изоляции, если коэффициент теплопроводности k = 0,00017, а также количество теплоты, отдаваемой 1 м трубы.

▲ Если тело находится в стационарном тепловом состоянии и температура T в каждой его точке есть функция только одной координаты x, то, в соответствии с законом теплопроводности Фурье, количество теплоты, испускаемое в секунду будет равно

$$Q=\lambda S(x)\frac{dT}{dx}=\text{const} \qquad (1)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, а площадь сечения тела $S(x)$ определяется по формуле

$S(x)=2\pi xl$,

где x– радиус трубопровода, l – длина трубы, следовательно, уравнение (1) можно записать в виде

$$Q=\lambda(2\pi xl)\frac{dT}{dx}=\text{const}$$

или

$$Q=2\lambda\pi xl\frac{dT}{dx}=\text{const} \qquad (2)$$

Разделяя переменные в дифференциальном уравнении (2) получим

$$dT=\frac{Q}{2\lambda\pi l}\cdot\frac{dx}{x} \qquad (3)$$

По условию задачи необходимо определить распределение температуры внутри изоляции. Поэтому сначала левую часть уравнения (3) интегрируем в пределах от 160ºС до 30ºС, а правую часть интегрируем в пределах от 10 до 20 см.

$$\int_{160}^{30} dT = -\frac{Q}{2\lambda\pi l}\int_{10}^{20}\frac{dx}{x};$$

После интегрирования уравнения (3), находим

$$T\Big|_{160}^{30} = 30 - 160 = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\cdot \ln x\Big|_{10}^{20} = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\cdot \ln 2 \qquad (4)$$

Затем, проинтегрируем левую часть уравнения (3) в пределах от 160ºС до некоторой температуры T, а правую часть интегрируем в пределах от 10 до x см. После интегрирования уравнения (3), находим

$$\int_{160}^{T} dT = -\frac{Q}{2\lambda\pi l}\int_{10}^{x}\frac{dx}{x};$$

$$T\Big|_{160}^{T} = T - 160 = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\cdot \ln x\Big|_{10}^{x} = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\cdot \ln 0{,}1x \qquad (5)$$

Разделив почленно уравнение (5) на уравнение (4), получим

$$\frac{T-160}{-130} = \frac{\ln 0.1x}{\ln 2}$$

Из этого уравнения следует, что закон распределения температуры внутри изоляции будет иметь вид

$$T = 591{,}8 - 431{,}8\ln x$$

Кроме того, по условию задачи необходимо определить количество теплоты отдаваемой 1 м трубы. Поэтому для того, чтобы выполнить условие задачи необходимо из уравнения (4) при l = 100 см выразить Q и рассчитать его значение

$$Q = \frac{130\cdot 0.00017\cdot 2\cdot \pi\cdot 100}{\ln 2} = \frac{130\cdot 0.00017\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 100}{0{,}69315} = 1730600\ ккал$$

▲

<u>*Пример.5*</u> Кусок рудной массы m падает в рудоспуск под действием силы тяжести, при этом воздух оказывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости падения. Найти закон движения куска.

▲ Пусть s — расстояние, пройденное телом к моменту t. Тогда движение определяется уравнением

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

которое может быть представлено в виде

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \qquad (1)$$

где скорость $v = \frac{ds}{dt}$. Дифференциальное уравнение (1) является уравнением Риккати.

Разделяя в нем переменные, имеем

$$\frac{m\,dv}{mg - kv^2} = dt$$

или после сокращения левой части равенства на m

$$\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=dt$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=t+C \qquad (2)$$

Для вычисления интеграла в левой части уравнения (2) применяем метод неопределенных коэффициентов, и тогда

$$\int\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=\int\frac{A\,dv}{\sqrt{g}-\sqrt{\frac{k}{m}}v}+\int\frac{B\,dv}{\sqrt{g}+\sqrt{\frac{k}{m}}v} \qquad (3)$$

Откуда

$$A-B=0$$

$$A+B=\frac{1}{\sqrt{g}}$$

или

$$A=B=\frac{1}{2\sqrt{g}}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в интеграл (3), имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}}\sqrt{\frac{m}{k}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)}{\sqrt{g}-\sqrt{\frac{gk}{m}}v}+\frac{1}{2\sqrt{gk}}\sqrt{\frac{m}{k}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)}{\sqrt{g}+\sqrt{\frac{gk}{m}}v}=t+C$$

Для краткости обозначим $\sqrt{\frac{gk}{m}}=r$. Тогда после умножения равенства на $2\sqrt{\frac{gk}{m}}$ находим

$$\int\frac{d(rv)}{\sqrt{g}-rv}+\int\frac{d(rv)}{\sqrt{g}+rv}=2r(t+C)$$

или

$$\ln(\sqrt{g}-rv)+\ln(\sqrt{g}+rv)=2rt+2rC$$

откуда

$$\ln\left(\frac{\sqrt{g}+rv}{\sqrt{g}-rv}\right)=2rt+2rC \qquad (4)$$

Потенцируя уравнение (4), получаем

$$\frac{\sqrt{g}+rv}{\sqrt{g}-rv}=e^{2rt+2rC}=e^{2rt}\cdot e^{2rC}=C_1e^{2rt}$$

Откуда искомая функция имеет вид

$$v=\frac{g}{r}\cdot\frac{\left(C_1e^{2rt}-1\right)}{\left(C_1e^{2rt}+1\right)}$$

или с учетом того, что $g=\frac{r^2m}{k}$ и $C^*=\frac{1}{C_1}$, получим

$$v=\frac{rm}{k}\cdot\frac{\left(e^{rt}-C^*e^{-rt}\right)}{\left(e^{rt}+C^*e^{-rt}\right)} \qquad (5)$$

Из уравнения (5) очевидно, что при t, стремящемся к бесконечности, скорость v достигает предельного значения

$v_{max}= V$,

для которого

$$V=\frac{rm}{k}=\sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Следовательно, уравнение (5) записывается в виде

$$v=V\cdot\frac{\left(e^{rt}-C^*e^{-rt}\right)}{\left(e^{rt}+C^*e^{-rt}\right)} \qquad (6)$$

Начальное условие: при $t = 0$ $v = v_0$.

Пусть ради краткости записи $u_0=v_0/V$. Тогда постоянная интегрирования C^* в уравнении (6) принимает значение

$$\tilde{N}^*=\frac{1-u_0}{1+u_0}$$

Подставляя это значение в уравнение (6), замечаем, что v может быть записана в виде

$$v=V\cdot\frac{\left(u_0+\operatorname{th}\frac{rt}{V}\right)}{\left(1+u_0\operatorname{th}\frac{rt}{V}\right)}$$

Принимая, что при $t = 0$ $s = 0$, можем теперь определить закон движения s:

$$s=\int_0^t v(t)\,dt=\frac{V}{r}\left(\operatorname{ch}\frac{rt}{V}+\operatorname{sh}\frac{rt}{V}\right)$$

Подставляя $r=\frac{g}{V}$ и $u_0=\frac{v_0}{V}$ в это равенство, окончательно получаем искомый закон движения

$$s=\frac{V^2}{g}\left(\operatorname{ch}\frac{gt}{V}+\operatorname{sh}\frac{gt}{V}\right).$$ ▲

Пример 6. Найти решения уравнения:

$$\left(x^3y-3x^2y+y^3\right)dx+2x^3dy=0.$$

▲Разделив обе части исходного уравнения на $dx\neq0$ (x=0 – очевидное решение), получим уравнение Бернулли

$$2x^3\frac{dy}{dx}+\left(x^3-3x^2\right)y=-y^3.$$

Считая $y\neq0$ (y=0 – тривиальное решение), делим обе части последнего уравнения на ($-y^3$) и делаем замену $z(x)=y^{-2}$. Тогда получим

$$-\frac{2y'}{y^3} = z'(x), \quad x^3 z' - \left(x^3 - 3x^2\right)z = 1.$$

Решая это уравнение, находим

$$z(x) = C_1 x^{-3} e^x - x^{-3}.$$

Теперь запишем все решения исходного уравнения

$$C_1 y^2 e^x - y^2 - x^3 = 0; \quad x = 0; \quad y = 0.$$ ▲

<u>*Пример 7.*</u> Найти общее решение уравнения:

$$y' = -y^2 + 1 + x^2.$$

▲Это уравнение является уравнением Риккати, в котором *a(x)* =-1, *b(x)*=0 и *c(x)* = $1+x^2$. Проверка условия $c(x) = -a(x)x^2 - b(x)x + 1$. Привело к результату: $1+x^2=1+x^2$. Следовательно, это условие выполняется и за частное решение исходного уравнения можно принять функцию: $y_1 = x$. Таким образом, полагая $y = x + \frac{1}{z}$ и вычислив $y' = 1 - z^{-2}z'$, приводим исходное уравнение к неоднородному линейному уравнению: $z' - 2xz = 1$. Откуда

$$z = e^{x^2}\left(C + \int e^{-x^2} dx\right).$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения Риккати имеет вид:

$$y = x + \frac{e^{-x^2}}{C + \int e^{-x^2} dx}.$$ ▲

<u>*Пример 8.*</u> Найти общий интеграл уравнения:

$$(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 2)dy = 0.$$

▲Установим, является ли исходное равнение уравнением в полных дифференциалах. Для этого проверим, выполняется ли условие Эйлера (1.87). Здесь

$M(x, y) = x + y - 1$, а $N(x, y) = x - y^2 + 2$.

Вычислим производные $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$: $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ и $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$, следовательно, условие Эйлера выполнено, и исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию *u(x,y)* по изложенной выше схеме, а именно, предположим, чтобы выполнялось равенство $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y - 1,$$

отсюда

$$u(x, y) = \int (x + y - 1)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy - x + \varphi(y).$$

Далее потребуем от *u(x,y)* обеспечения равенства $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x_2}{2} + xy - x + \varphi(y)\right] = N(x, y) = x - y^2 + 2,$$

или $0 + x - 0 + \varphi'(y) = x + \varphi'(y) = x - y^2 + 2$, или $\varphi'(y) = -y^2 + 2$. Следовательно,

$$\varphi(y)=\int(-y^2+2)dy=-\frac{y^3}{3}+2y.$$

Таким образом, искомая функция и соответственно общий интеграл исходного уравнения будут иметь вид:

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy-x-\frac{y^3}{3}+2y=C.$$

Получим общий интеграл исходного уравнения, потребовав выполнения равенства $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$:

$$u(x,y)=\int\left(x-y^2+2\right)dy+\psi(x)=xy-\frac{y^3}{3}+2y+\psi(x),$$

а теперь потребуем, чтобы выполнялось $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$: $y+\psi'(x)=x+y-1$. Найдем $\psi(x)=\int\left(x-1\right)dx=\frac{x^2}{2}-x$. Таким образом, общий интеграл исходного уравнения имеет вид:

$$C=xy-\frac{y^3}{3}+2y+\frac{x^2}{2}-x.$$

Следовательно, независимо от того, какое из условий (1.86) будет выполняться в первую очередь, общий интеграл исходного уравнения будет одним и тем же.

Общий интеграл исходного уравнения можно записать в виде (1.89):

$$\int_{x_0}^{x}(x+y-1)dx+\int(x_0-y^2+2)dy=C.$$

Выполним интегрирование:

$$\left(\frac{x^2}{2}+xy-x\right)\Bigg|_{x_0}^{x}+\left(x_0y-\frac{y^3}{3}+2y\right)\Bigg|_{y_0}^{y}=C,$$

или

$$\frac{x^2}{2}+xy-x-\left(\frac{x_0^2}{2}+x_0y-x_0\right)+\left(x_0y-\frac{y^3}{3}+2y\right)-\left(x_0y_0-\frac{y_0^3}{3}+2y_0\right)=C,$$

т.к. x_0, y_0 можно брать произвольно, то, обозначив $C_1=C+\frac{x_0^2}{2}-x_0+x_0y_0+2y_0-\frac{y_0^3}{3}$, окончательно получим

$$C_1=\frac{x^2}{2}+xy-x-\frac{y^3}{3}+2y.\blacktriangle$$

Пример 9. Найти решения уравнения: $y'=\exp\left(\frac{xy'}{y}\right)$.

▲ Разрешив это уравнение относительно x и, полагая в этом уравнении $y'=p$, получим $x=\frac{y}{p}\ln p$. Так как $dy=pdx$, то

$$dy=pd\left(\frac{y}{p}\ln p\right)=\frac{y}{p}dp+\ln pdy-\frac{y}{p}\ln pdp,$$

или

$$(1-\ln p)\left(dy-\frac{y}{p}dp\right)=0$$
.

Из этого уравнения находим: $p = e$ и $p = Cy$. Таким образом, решения исходного уравнения имеют вид:

$x=\frac{y}{e}$ и $Cx=\ln Cy$. ▲

<u>*Пример 10.*</u> Найти общее решение уравнения: $y''-y=0$.

▲ 1. Запишем характеристическое уравнение: $\lambda^2-1=0$.

2. Найдем корни этого уравнения: $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-1$.

3. Поскольку корни действительные и различные, то по правилу 1 им ставятся в соответствие функции $y_1=e^x$, и $y_2=e^{-x}$, которые составляют фундаментальную систему линейно независимых решений исходного уравнения. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$. ▲

<u>*Пример 11.*</u> Найти общее решение уравнения:

$y^{(5)}-5y^{(4)}+18y'''-34y''+45y'-25y=0$.

▲ 1. Запишем характеристическое уравнение:

$\lambda^5-5\lambda^4+18\lambda^3-34\lambda^2+45\lambda-25=0$.

2. Это характеристическое уравнение имеет корни:

$\lambda_1=1,\ \ \lambda_{2,3}=1\pm 2i,\ \ \lambda_{4,5}=1\pm 2i$.

3. Мы видим, что среди корней характеристического уравнения есть как действительные и различные корни, так и комплексно сопряженные, причем комплексные корни являются кратными. Поэтому для составления фундаментальной системы линейно независимых решений воспользуемся правилами 1, 2 и 3. Корню $\lambda_1=1$ соответствует решение $y_1=e^x$, а каждому из двукратных корней $\lambda_{2,4}=1+2i$ и $\lambda_{3,5}=1-2i$, отвечают решения: $y_2=e^x\cos 2x,\ \ y_3=xe^x\cos 2x,\ \ y_4=e^x\sin 2x,\ \ y_5=xe^x\sin 2x.$ Совокупность этих пяти решений y_1,y_2,y_3,y_4,y_5 - образует фундаментальную систему линейно независимых решений. Следовательно, общее решение запишется так:

$y=C_1e^x+e^x\left[(C_2+xC_3)\cos 2x+(C_4x+C_5)\sin 2x\right]$. ▲

<u>*Пример 12.*</u> Найти частное и общее решение уравнения:

$$y''-4y'+5y=\frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

▲ В соответствии с методом Лагранжа, составим соответствующее этому неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами однородное уравнение

$y''-4y+5y=0$

и решим его. Для этого запишем характеристическое уравнение: $\lambda^2-4\lambda+5=0$. Это характеристическое уравнение имеет корни: $\lambda_{1,2}=2\pm i$.

Мы видим, что корни характеристического уравнения комплексные, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид:

$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$.

Будем искать частное решение исходного уравнения в виде

$y = C_1(x) e^{2x} \cos x + C_2(x) e^{2x} \sin x$. (*)

Составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{2x} \cos x + C_2'(x) e^{2x} \sin x = 0 \\ C_1'(x)\left(2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x\right) + C_2'(x)\left(2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x\right) = \dfrac{e^{2x}}{\cos x} \end{cases}$$

или сокращая на e^{2x},

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x)(2\cos x - \sin x) + C_2'(x)(2\sin x + \cos x) = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}. \quad (**)$$

Решить эту систему относительно C_1' и C_2' можно различными способами, например, используя правило Крамера. В данном случае удобнее сначала преобразовать второе уравнение, а именно, умножить обе его части первого уравнения на –2 и затем прибавить полученный результат ко второму. В итоге получим уравнение:

$$C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

и, следовательно, этим уравнением можно заменить второе уравнение в системе (**)

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)(\cos x) = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\mathrm{tg}x, \ \Rightarrow C_1(x) = -\int \mathrm{tg}x\,dx = \ln|\cos x|,$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{1} = 1, \ \Rightarrow C_2(x) = \int dx = x.$$

Подставляя полученные значения C_1' и C_2' в (*), получим частное решение исходного неоднородного уравнения

$y_{частное}(x) = e^{2x}\left(\cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x\right)$.

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}\left(\cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x\right)$. ▲

<u>Пример 13.</u> Найти частное решение уравнения: $y'' - y = xe^x$.

▲ 1. Для правой части исходного уравнения определяем параметры □□□□*q,l:* □□□□□□□□□□□□□□ *q = 1.*

2. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 1 = 0$ действительные и различные, $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Учитывая, что число $(\alpha + i\beta) = 1$ совпадает с корнем $\lambda_1 = 1$.кратности 1, то тогда *s*=1, и *m* = max(*q*,*l*)= 1. Исходя из этого, можно выписать вид искомого частного решения:

$y_ч(x) = e^x(A_0x + A_1)x$.

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для $y_ч(x)$ и ее второй производной $y''_ч(x) = e^x\left[A_0x^2 + x(4A_0 + A_1) + 2A_1 + 2A_0\right]$.

После преобразований (сокращения на e^x и приведения подобных) получаем равенство: $4A_0x + 2A_0 + 2A_1 = x$.

В этом равенстве приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях функции переменной x в правой и левой частях:

$x^1 \ : \ 4A_0 = 1$

$x^0 \ : \ 2A_0 + 2A_1 = 0$, откуда следует, что $A_0 = \frac{1}{4}, \ A_1 = -\frac{1}{4}$.

Полученные значения неопределенных коэффициентов A_0 и A_1 подставив в вид искомого частного решения, получим окончательно:

$y_ч(x) = \frac{1}{4}e^x(x^2 - x)$.▲

<u>Пример 14.</u> Найти частное решение уравнения:

$y''' - y'' + 3y' + 5y = 5e^{2x}\cos x + 4e^{-x}$.

▲ Прежде всего, функцию $f(x)$ представим в виде суммы двух функций $f_1(x) = 5e^{2x}\cos x$ и $f_2(x) = 4e^{-x}$. Для каждого случая будем подбирать свое частное решение исходного уравнения.

1. Для функции $f_1(x)$ определяем параметры □□□□*q,l:* □□□□□□□□□□□□□□ $q = 0$, а для функции $f_2(x)$ соответственно □□□□□□□□□□□□□□□ $q = 0$.

2. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0$ имеет корни:

$\lambda_1 = -1, \ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$.

Учитывая, что для функции $f_1(x)$ число $(\alpha + i\beta) = 2 + i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому s=0, а для функции $f_2(x)$ число $(\alpha + i\beta) = -1$ совпадает с корнем □$_1$ кратности 1. Исходя из этого, можно выписать частное решение:

$y_ч(x) = y_{ч1}(x) + y_{ч2}(x) = e^{2x}(A_0\cos x + B_0\sin x) + D_0xe^{-x}$.

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для $y_ч(x)$ и его производных и находим значения неопределенных коэффициентов A_0, B_0, D_0. Для удобства определения этих коэффициентов подставим $y_{ч1}(x)$ в уравнение с правой частью $f_1(x)$, а $y_{ч2}(x)$ в уравнение с правой частью $f_2(x)$.

Подставляем $y_{ч1}(x) = e^{2x}(A_0\cos x + B_0\sin x)$ и производные:

$y'_{ч1}(x) = e^{2x}(2A_0\cos x + 2B_0\sin x - A_0\sin x + B_0\cos x)$,

$y''_{ч1}(x) = e^{2x}(3A_0\cos x + 3B_0\sin x - 4A_0\sin x + 4B_0\cos x)$,

$y'''_{ч1}(x) = e^{2x}(2A_0\cos x + 2B_0\sin x - 11A_0\sin x + 11B_0\cos x)$

в исходное уравнение с правой частью $f_1(x) = 5e^{2x}\cos x$.Сокращая на e^{2x} и приравнивая коэффициенты при cos$x$ и sin$x$ в правой и левой частях полученного равенства, будем иметь систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 2A_0 + 11B_0 - 3A_0 - 4B_0 + 6A_0 + 3B_0 + 5A_0 = 5, \\ 2B_0 - 11A_0 - 3B_0 + 4A_0 + 6B_0 - 3A_0 + 5B_0 = 0, \end{cases}$$

или после преобразований

$$\begin{cases} 10A_0 + 10B_0 = 5 \\ -10A_0 + 10B_0 = 0, \end{cases}$$

откуда находим, что

$$A_0 = B_0 = \frac{1}{4}, \ \Rightarrow y_{ч1}(x) = \frac{1}{4} e^{2x} (\cos x + \sin x).$$

Далее подставляем функцию $f_2(x) = D_0 x e^{-x}$ и ее производные:

$$y'_{ч2}(x) = D_0 e^{-x}(-x+1), \ \ y''_{ч2}(x) = D_0 e^{-x}(x-2), \ \ y'''_{ч2}(x) = D_0 e^{-x}(3-x)$$

в исходное уравнение с правой частью равной $4e^{-x}$. Сократив на e^{-x}, получим равенство $8D_0=4$, то есть $D_0 = ½$, следовательно

$$y_{ч2}(x) = \frac{1}{2} x e^{-x}.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения запишем в виде суммы двух частных решений, и окончательно оно будет иметь вид:

$$y_ч(x) = y_{ч1}(x) + y_{ч2}(x) = \frac{1}{4} e^{2x} (\cos x + \sin x) + \frac{1}{2} x e^{-x}. ▲$$

<u>Пример 15.</u> Найти решение уравнения: $x^2 y'' - xy' + y = 0$.

▲ Полагая $x = e^t$ или $t = \ln x$, найдем $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$.

Вычислим производные по новой переменной *t*, обозначив точками дифференцирование по *t*:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} = \dot{y} e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dt}(y') \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(\dot{y} e^{-t}) \cdot e^{-t} = (\ddot{y} - \dot{y}) e^{-2t}.$$

Подставив $\dot{y}, \ddot{y}$ в исходное уравнение, получим

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) - e^t \cdot e^{-t} \cdot y + y = 0, \text{ или } \ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0.$$

Следовательно, мы получили однородное линейное уравнение. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Поскольку корни действительные и кратные, с кратностью равной двум, то общее решение будет иметь вид:

$$y(t) = (C_1 + tC_2) e^t.$$

Перейдя к переменной *x*, окончательно получим общее решение исходного уравнения

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x) x. ▲$$

<u>Пример 16.</u> Найти решение уравнения:

$$x^2 y'' - xy' + y = \cos \ln x.$$

▲ Полагая $x = e^t$ или $t = \ln x$, найдем $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$.

Вычислим производные по новой переменной *t*, обозначив точками дифференцирование по *t*:

$$y' = \dot{y} e^{-t}, \quad y'' = (\ddot{y} - \dot{y}) e^{-2t}.$$

Подставив $\dot{y}, \ddot{y}$ в исходное уравнение, получим

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \cos t. \ (*)$$

Это неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами Общее решение

соответствующего ему однородного уравнения (см. *пример 36*) имеет вид

$$y(t)=(C_1+tC_2)e^t,$$

а частное решение можно получить методом неопределенных коэффициентов.

Поскольку параметры правой части неоднородного уравнения (*) равны, соответственно, □□□□□□□□□□□□□□□ $q = 0$, $l = 0$ и число $(\alpha+i\beta)=i\beta$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, поэтому s=0, и $m = \max(q,l)= 0$. Исходя из этого, можно выписать вид искомого частного решения:

$$y_ч(t)=A_0\cos t+B_0\sin t$$

Вычислим производные от $y_ч(t)$

$$\dot{y}_ч(t)=-A_0\sin t+B_0\cos t,$$

$$\ddot{y}_ч(t)=-A_0\cos t-B_0\sin t$$

и подставив их в уравнение (*), получим

$$-2B_0\cos t+2A_0\sin t\equiv\cos t.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях в правой и левой частях этого уравнения

$$-2B_0=1,\ \Rightarrow B_0=-\frac{1}{2},$$

$$2A_0=0,\quad \Rightarrow A_0=0.$$

Следовательно, частное решение уравнения (*) имеет вид

$$y_ч(t)=-\frac{1}{2}\sin t,$$

а общее решение уравнения (*) будет выглядеть так:

$$y_{общее}(t)=(C_1+tC_2)e^t-\frac{1}{2}\sin t.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(x)=(C_1+C_2\ln x)x-\frac{1}{2}\sin\ln x.\blacktriangle$$

3.1.2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности в ходе текущего контроля успеваемости

Устный ответ

Оценка знаний предполагает дифференцированный подход к обучающемуся, учет его индивидуальных способностей, степень усвоения и систематизации основных понятий и категорий по дисциплине. Кроме того, оценивается не только глубина знаний поставленных вопросов, но и умение использовать в ответе практический материал. Оценивается культура речи, владение навыками ораторского искусства.

Критерии оценивания: последовательность, полнота, логичность изложения, анализ различных точек зрения, самостоятельное обобщение материала, использование профессиональных терминов, культура речи, навыки ораторского искусства. Изложение материала без фактических ошибок.

Оценка *«отлично»* ставится в случае, когда материал излагается исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно, при этом раскрываются не только основные понятия, но и анализируются точки зрения различных авторов. Обучающийся не затрудняется с ответом, соблюдает культуру речи.

Оценка *«хорошо»* ставится, если обучающийся твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, знает практическую базу, но при ответе на вопрос допускает несущественные погрешности.

Оценка *«удовлетворительно»* ставится, если обучающийся освоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушает последовательность в изложении материала, затрудняется с ответами, показывает отсутствие должной связи между анализом, аргументацией и выводами.

Оценка *«неудовлетворительно»* ставится, если обучающийся не отвечает на поставленные вопросы.

Кейсы (ситуации и задачи с заданными условиями)

Обучающийся должен уметь выделить основные положения из текста задачи, которые требуют анализа и служат условиями решения. Исходя из поставленного вопроса в задаче, попытаться максимально точно определить проблему и соответственно решить ее.

Задачи могут решаться устно и/или письменно. При решении задач также важно правильно сформулировать и записать вопросы, начиная с более общих и, кончая частными.

Критерии оценивания – оценка учитывает методы и средства, использованные при решении ситуационной, проблемной задачи.

Оценка *«отлично»* ставится в случае, когда обучающийся выполнил задание (решил задачу), используя в полном объеме теоретические знания и практические навыки, полученные в процессе обучения.

Оценка *«хорошо»* ставится, если обучающийся в целом выполнил все требования, но не совсем четко определяется опора на теоретические положения, изложенные в научной литературе по данному вопросу.

Оценка *«удовлетворительно»* ставится, если обучающийся показал положительные результаты в процессе решения задачи.

Оценка *«неудовлетворительно»* ставится, если обучающийся не выполнил все требования.

Тестирование

Является одним из средств контроля знаний обучающихся по дисциплине (модулю).

Критерии оценивания – правильный ответ на вопрос

Оценка *«отлично»* ставится в случае, если правильно выполнено 90-100% заданий.

Оценка *«хорошо»* ставится, если правильно выполнено 70-89% заданий.

Оценка *«удовлетворительно»* ставится в случае, если правильно выполнено 50-69% заданий.

Оценка *«неудовлетворительно»* ставится, если правильно выполнено менее 50% заданий.

3.2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

3.2.1. Критерии оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)

Шкала оценивания	Результаты обучения	Показатели оценивания результатов обучения
ОТЛИЧНО	Знает:	- обучающийся глубоко и всесторонне усвоил материал, уверенно, логично, последовательно и грамотно его излагает, опираясь на знания основной и дополнительной литературы, - на основе системных научных знаний делает квалифицированные выводы и обобщения, свободно оперирует категориями и понятиями.
	Умеет:	- обучающийся умеет самостоятельно и правильно решать учебно-профессиональные задачи или задания, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагать свое решение, используя научные понятия, ссылаясь на нормативную базу.
	Владеет:	- обучающийся владеет рациональными методами (с использованием рациональных методик) решения сложных профессиональных задач, представленных деловыми играми, кейсами и т.д.; При решении продемонстрировал навыки - выделения главного, - связкой теоретических положений с требованиями руководящих документов,

		- изложения мыслей в логической последовательности, - самостоятельного анализа факты, событий, явлений, процессов в их взаимосвязи и диалектическом развитии.
ХОРОШО	Знает:	- обучающийся твердо усвоил материал, достаточно грамотно его излагает, опираясь на знания основной и дополнительной литературы, - затрудняется в формулировании квалифицированных выводов и обобщений, оперирует категориями и понятиями, но не всегда правильно их верифицирует.
	Умеет:	- обучающийся умеет самостоятельно и в основном правильно решать учебно-профессиональные задачи или задания, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагать свое решение, не в полной мере используя научные понятия и ссылки на нормативную базу.
	Владеет:	- обучающийся в целом владеет рациональными методами решения сложных профессиональных задач, представленных деловыми играми, кейсами и т.д.; При решении смог продемонстрировать достаточность, но не глубинность навыков, - выделения главного, - изложения мыслей в логической последовательности, - связки теоретических положений с требованиями руководящих документов, - самостоятельного анализа факты, событий, явлений, процессов в их взаимосвязи и диалектическом развитии.
УДОВЛЕТВО-РИТЕЛЬНО	Знает:	- обучающийся ориентируется в материале, однако затрудняется в его изложении; - показывает недостаточность знаний основной и дополнительной литературы; - слабо аргументирует научные положения; - практически не способен сформулировать выводы и обобщения; - частично владеет системой понятий.
	Умеет:	- обучающийся в основном умеет решить учебно-профессиональную задачу или задание, но допускает ошибки, слабо аргументирует свое решение, недостаточно использует научные понятия и руководящие документы.
	Владеет:	- обучающийся владеет некоторыми рациональными методами решения сложных профессиональных задач, представленных деловыми играми, кейсами и т.д.; При решении продемонстрировал недостаточность навыков - выделения главного, - изложения мыслей в логической последовательности, - связки теоретических положений с требованиями руководящих документов, - самостоятельного анализа факты, событий, явлений, процессов в их взаимосвязи и диалектическом развитии.
НЕУДОВЛЕТВО-РИТЕЛЬНО	Знает:	- обучающийся не усвоил значительной части материала; - не может аргументировать научные положения; - не формулирует квалифицированных выводов и обобщений; - не владеет системой понятий.
	Умеет:	обучающийся не показал умение решать учебно-профессиональную задачу или задание.
	Владеет:	не выполнены требования, предъявляемые к навыкам, оцениваемым «удовлетворительно».

3.2.2. Контрольные задания и/или иные материалы для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов для устных ответов (варианты теста)

1. Векторы и действия с ними.
2. Линейное пространство.
3. Матрицы и действия с ними.
4. Определители: понятие, свойства, применение.
5. Системы линейных уравнений: понятие, виды, методы решений.

6. Линейные операторы и действия с ними.
7. Квадратичные формы: понятия и виды.
8. Линии на плоскости.
9. Кривые второго порядка: понятие, виды, преобразования.
10. Прямые линии и плоскости в пространстве.
11. Практическое занятие
12. Множество: понятие, виды, операции над ними.
13. Функции: понятие, виды, применение.
14. Переделы: определение, виды, применение.
15. Непрерывность функции: определение, свойства, применение.
16. Производная функции: определение, свойства, применения.
17. Свойства дифференцируемых функции: основные теории и правила.
18. Исследование функций с помощью первой производной.
19. Исследование функций с помощью второй производной.
20. Методы интегрирования.
21. Интегрирование рациональных дробей.
22. Интегрирование иррациональных функций.
23. Интегрирование тригонометрических функций.
24. Определенный интеграл: понятие, свойства, применение.
25. Несобственные интегралы: понятие, виды, свойства
26. Векторы и действия с ними.
27. Линейное пространство.
28. Матрицы и действия с ними.
29. Определители: понятие, свойства, применение.
30. Системы линейных уравнений: понятие, виды, методы решений.
31. Линейные операторы и действия с ними.
32. Квадратичные формы: понятия и виды.
33. Линии на плоскости.
34. Кривые второго порядка: понятие, виды, преобразования.
35. Прямые линии и плоскости в пространстве.
36. Практическое занятие
37. Множество: понятие, виды, операции над ними.
38. Функции: понятие, виды, применение.
39. Переделы: определение, виды, применение.
40. Непрерывность функции: определение, свойства, применение.
41. Производная функции: определение, свойства, применения.
42. Свойства дифференцируемых функции: основные теории и правила.
43. Исследование функций с помощью первой производной.
44. Исследование функций с помощью второй производной.
45. Методы интегрирования.
46. Интегрирование рациональных дробей.
47. Интегрирование иррациональных функций.
48. Интегрирование тригонометрических функций.
49. Определенный интеграл: понятие, свойства, применение.
50. Несобственные интегралы: понятие, виды, свойства
51. Функция многих переменных: понятие, свойства, применение.
52. Частные приращения и частные производные: понятие и свойства.
53. Полные приращения и полный дифференциал: понятие и свойство.
54. Экстремум: понятие и свойства.
55. Дифференциальные уравнения первого порядка: понятие, свойства, применения.
56. Дифференциальные уравнения второго и высшего порядков: понятие, свойства, применение.

57. Разностные уравнения: понятие, свойства, применение.
58. Числовые ряды: понятие, свойства, применение.
59. Функциональные ряды: понятие. свойства, применение.
60. Ряды Тэйлора и Маклорена: определение, свойства, применение.

Тексты проблемно-аналитических и (или) практических учебно-профессиональных задач

1.Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ -4 & p_3 \end{vmatrix}.$$

2. Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} x & p_2 \\ p_3 & p_1(x+1) \end{vmatrix} = 6.$$

3.Проверить существование и вычислить обратную матрицу для матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ 2 & p_2 \end{pmatrix}.$$

4.Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} p_1x - p_2y = 8 \\ 3x + p_3y = 17 \end{cases}.$$

5. Найти собственные значения матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ 2 & p_2 \end{pmatrix}.$$

6.Составить уравнение траектории точки M (x; y), которая при своем движении остается вдвое ближе к точке A(−1;−1), чем к точке B(−4;−4).

7.Дано уравнение: $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Выяснить, какую кривую второго порядка она описывает.

8.Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку A(2;8) и симметрична относительно оси Oy. Написать ее уравнение.

9. Для прямой $p_1x + p_2y - p_3 = 0$: а) провести перпендикулярную ей прямую, проходящую через точку (20; –18) и записать ее уравнение, б) определить координаты точки пересечения данной прямой с прямой $p_2^2x - p_1y + p_3 = 0$.

10. Даны два множества: A = {-1, 0, 3,5} и B = {-3, 1, 0, 7, 9}. Найти AUB, A∩B, A \ B, B \ A .

11. Определить интервалы монотонности $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$.

12. Написать уравнение касательной к кри $y = x^3 + 3x^2 - 2$ в точке $x_0 = -1$

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{6x}$

14. Найти область определения функции z = 2ln(xy).

15. Найти производную функции $f(x) = \sin(5x + 3)$

16. Найти производную функци $y = \frac{e^x}{x}$

17. Найти дифференциал функци $y = arctg\sqrt{x}$ в точке x = 1.

18.Найти вторую производную функции e^{2x+1} в точке x = 0.

19.Чему равна первообразная функц $x/(x^2+1)$?

$$\int_{-1}^{2} x^4\,dx$$

20. Вычислить интеграл

21. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln x}{x} dx$

22. Вычислить интеграл $\int 11 \sin x dx$

23. Вычислить частные производные первого и второго порядка для функции z = $x^3 - 2xy^2 + y^2$.

24. Найти экстремум функции z = xy(2 – x – y).

25. Для функции $u = y^2 z + 3z^2 - 4xyz$ в точке К(3,1,1) найти градиент.

26. Найти полный дифференциал функц $e^{\frac{x}{y}}$ в точке М (1,1).

27. Найти общий интеграл дифференциальных уравнений:

а) $\mathrm{tg}x \sin^2 y dx + \cos^2 x \mathrm{ctg} y dy = 0$ б) $\sqrt{1+y^2} dx - (2+y)\sqrt{1+x^2} dy = 0$

28. Проинтегрировать уравнение $y' = xy + xy^2$ при начальном условии y(0) = 2

29. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' = x^2 + y$ б) $y' \cos x + y \sin x = 1$

30. Решить уравнение

$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$

31. Определить сходится ли данный р $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$.Если сходится, указать по какому признаку сходимости.

32. Разложить функцию y(x) = $\cos(x^2)$ в ряд Маклорена.

3.2.3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков в ходе промежуточной аттестации

Процедура оценивания знаний (устный ответ)

Предел длительности	10 минут
Предлагаемое количество заданий	2 вопроса
Последовательность выборки вопросов из каждого раздела	Случайная
Критерии оценки	- требуемый объем и структура - изложение материала без фактических ошибок - логика изложения - использование соответствующей терминологии - стиль речи и культура речи - подбор примеров их научной литературы и практики
«5» если	требования к ответу выполнены в полном объеме
«4» если	в целом выполнены требования к ответу, однако есть небольшие неточности в изложении некоторых вопросов
«3» если	требования выполнены частично – не выдержан объем, есть фактические ошибки, нарушена логика изложения, недостаточно используется соответствующая терминологии

Процедура оценивания умений и навыков (решение проблемно-аналитических и практических учебно-профессиональных задач)

Предлагаемое количество заданий	1
Последовательность выборки	Случайная
Критерии оценки:	- выделение и понимание проблемы - умение обобщать, сопоставлять различные точки зрения - полнота использования источников - наличие авторской позиции - соответствие ответа поставленному вопросу - использование социального опыта, материалов СМИ, статистических данных

	- логичность изложения - умение сделать квалифицированные выводы и обобщения с точки зрения решения профессиональных задач - умение привести пример - опора на теоретические положения - владение соответствующей терминологией
«5» если	требования к ответу выполнены в полном объеме
«4» если	в целом выполнены требования к ответу, однако есть небольшие неточности в изложении некоторых вопросов. Затрудняется в формулировании квалифицированных выводов и обобщений
«3» если	требования выполнены частично – пытается обосновать свою точку зрения, однако слабо аргументирует научные положения, практически не способен самостоятельно сформулировать выводы и обобщения, не видит связь с профессиональной деятельностью

4. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

4.1. Электронные учебные издания

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для вузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 401 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07001-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/510750.
2. Мачулис, В. В. Высшая математика : учебное пособие для вузов / В. В. Мачулис. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 306 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01277-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/513124.
3. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 1 : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 248 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07889-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/513025.
4. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 2 : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 305 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07891-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/513026.

4.2. Электронные образовательные ресурсы

1. Электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» Biblio-online.ru (ЭБС «Юрайт») [Электронный ресурс]. – URL: https://urait.ru/.
2. Электронно-библиотечная система ZNANIUM [Электронный ресурс]. – URL: https://znanium.com/.
3. Электронная библиотечная система «Консультант студента» [Электронный ресурс]. – URL: https://www.studentlibrary.ru/.
4. e-Library.ru: Научная электронная библиотека [Электронный ресурс]. – URL: http://elibrary.ru/.
5. Научная электронная библиотека «КиберЛенинка» [Электронный ресурс]. – URL: http://cyberleninka.ru/.
6. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» [Электронный ресурс]. – URL: http://window.edu.ru/.
7. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов [Электронный ресурс]. – URL: http://fcior.edu.ru/.

4.3. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Обучающимся обеспечен доступ (удаленный доступ) к ниже следующим современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам:

1. Словари и энциклопедии на Академике [Электронный ресурс]. – URL: http://dic.academic.ru.
2. Система информационно-правового обеспечения «Гарант» [Электронный ресурс]. – URL: http://ivo.garant.ru/.

4.4. Комплект лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства

1. Лицензионное программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных приложений Microsoft Office.
2. Свободно распространяемое программное обеспечение: свободные пакеты офисных приложений Apache Open Office, LibreOffice.
3. Программное обеспечение отечественного производства: справочно-правовая система «Гарант» (Электронный периодический справочник «Система ГАРАНТ»), образовательная платформа ЮРАЙТ (Электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» Biblio-online.ru (ЭБС «Юрайт»)), электронно-библиотечная система ZNANIUM, электронная библиотечная система «Консультант студента».

4.5. Оборудование и технические средства обучения

Для реализации дисциплины (модуля) используются учебные аудитории для проведения учебных занятий, которые оснащены оборудованием и техническими средствами обучения, и помещения для самостоятельной работы обучающихся, которые оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду РХТУ им. Д.И. Менделеева. Допускается замена оборудования его виртуальными аналогами.

Наименование учебных аудиторий для проведения учебных занятий и помещений для самостоятельной работы*	**Оснащенность учебных аудиторий для проведения учебных занятий и помещений для самостоятельной работы оборудованием и техническими средствами обучения**
Учебные аудитории для проведения учебных занятий	Учебная аудитория укомплектована специализированной мебелью, отвечающей всем установленным нормам и требованиям, оборудованием и техническими средствами обучения (мобильное мультимедийное оборудование).
Помещение для самостоятельной работы	Помещение оснащено компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду РХТУ им. Д.И. Менделеева и к ЭБС.

* Номер конкретной аудитории указан в приказе об аудиторном фонде, расписании учебных занятий и расписании промежуточной аттестации.